SISTEMAS LINEARES

Introdução

Após uma breve compreensão sobre equação de primeiro grau, vem a seguinte dúvida: Afinal, é sempre uma incógnita? Sabe aquela expressão esquisita com uma letra no meio? Sempre será o famoso "x"? Veja:

$$x + 5 = 10$$

Neste caso, fica claro que x = 5. Mas e se for duas incógnitas? Por exemplo:

$$x + y = 10$$

Observação: Agora complicou! NÃO CONFUNDA: Equação de segundo grau é aquela equação na qual a incógnita analisada está elevada ao segundo grau! Quando há duas ou mais incógnitas, mas todas elevadas ao grau um ou zero, ainda é uma equação de primeiro grau!

Neste caso, quando temos várias incógnitas no grau um ou zero, podemos chamar o conjunto de expressões que temos de *SISTEMA LINEAR*.

Veja alguns exemplos:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 13 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + z + y = 10 \\ x - y = 16 \end{cases}$$

Agora, sempre que tivermos variáveis a serem determinadas, nosso objetivo é encontrar os valores numéricos para os quais as equações, ou seja, as afirmações, sejam verdadeiras. Logo, nesta aula, focaremos em resolver problemas que envolvam várias incógnitas e determinar o número de soluções que esse sistema linear consegue apresentar.

Um problema de idade...

Há dois amigos, Bart e Milhouse. Bart tem o dobro da idade de Milhouse. Se a soma das idades dos dois é igual a 72 anos, quantos anos tem cada um? Veja que, chamando a idade de Milhouse de X e a de Bart de y, é possível criar um sistema linear! Mas como resolvemos isso?

$$\begin{cases} y = 2x \\ y + x = 72 \end{cases}$$

Métodos de Resolução

Para resolvermos sistemas, há três métodos. Cada um envolve etapas a serem seguidas e, dependendo da situação, um pode ser mais fácil do que outro. Vamos ver quais são eles e alguns problemas resolvidos através deles?

Conjunto solução: Vale a pena relembrar!

Quando queremos expressar as respostas de alguma equação ou sistema linear, usamos um conjunto chamado conjunto solução (S). A seguir, quando resolvemos um sistema, indicaremos a resposta já dentro do conjunto solução S.

Método da Substituição

Este jeito de resolução se baseia em isolar uma incógnita e substituir o valor dela na outra afirmação. Veja um exemplo:

$$\begin{cases} x + y = 122 & \text{I} \\ x - 2y = 20 & \text{II} \end{cases}$$

Isolando x na primeira equação do sistema (I), é possível chegar em:

$$x = 122 - y$$

Substituindo o valor na segunda equação (II), obtemos:

$$x - 2y = 20$$

$$(122 - y) -2y = 20$$

Desenvolvendo:

$$(122 - y) -2y = 20$$

$$122 - y -2y = 20$$

$$122 - 3y = 20$$

$$-3y = 20 - 122$$

$$-3y = -102$$

$$3y = 102$$

$$y = 102/3$$

$$y = 34$$

Substituindo o valor na equação I, obtemos: $x = 122 - 34 = 88$.

Logo, a resposta é $x = 88$ e $y=34$. Conjunto solução: $S = \{(88 , 34)\}$.

Método da Adição

Método da adição consiste em adicionar ou subtrair uma equação da outra, a fim de eliminarmos umas das incógnitas e obtermos uma igualdade com apenas uma, no caso de duas variáveis. Veja o exemplo:

$$\begin{cases} x + y = 122 & \text{I} \\ x - 2y = 20 & \text{II} \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação do sistema (II) por - 1, obtemos:

$$\begin{cases} x + y = 122 \\ -x + 2y = -20 \end{cases}$$

Somando as duas equações (I + II) , obtemos:

$$x + y - x + 2y = 122 - 20$$

$$3y = 102$$

$$y = 34$$

Agora, basta repetir o mesmo processo feito depois da substituição do Método da substituição. Substituindo o valor em I:

$$x + y = 122$$

$$x + 34 = 122$$

$$x = 88$$

1. (PUCCamp – SP) Certo dia, numa mesma casa de câmbio, Sassa trocou 40 dólares e 20 euros por R$225,00 e Lilli trocou 50 dólares e 40 euros por R$336,00. Nesse dia, 1 euro estava cotado em:

a) R$ 3,80
b) R$ 3,75
c) R$ 3,70
d) R$ 3,68
e) R$ 3,65

2. (PUC-RS) Sabe-se que na compra de uma caixa de lenços, dois bonés e três camisetas gasta-se um total de R$127,00. Se três caixas de lenços, quatro bonés e cinco camisetas, dos mesmos tipos que os primeiros custam juntos R$241,00 a quantia a ser desembolsada na compra de apenas três unidades desses artigos, sendo um de cada tipo, será:

a) R$72,00

b) R$65,00
c) R$60,00
d) R$57,00
e) R$49,00

Escalonamento

A ideia desse método é transformar nosso sistema em formato de escada! Sim, isso facilita as contas. Pegamos um exemplo:

$$\begin{cases} 3x - y = 26 & \text{I} \\ x - 3y = 13 & \text{II} \end{cases}$$

Multiplicando por -3 na segunda equação (II), obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 3x - y = 26 \\ -3x + 9y = -39 \end{cases}$$

Utilizando o método da adição, obtemos

$$\begin{cases} 3x - y = 26 \\ 0x + 8y = -13 \end{cases}$$

Transformando os índices de x e y em 1, dividimos o por 3 a primeira equação do sistema (I) e por 8 a segunda (II):

$$\begin{cases} x - \frac{1}{3} y = 26/3 \\ y = -13/8 \end{cases}$$

Utilizando o método da substituição, usando o valor de y na primeira equação (I), obtemos:

$$x - \tfrac{1}{3} (-13/8) = 26/3$$

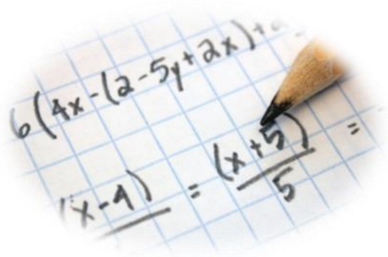
$$x = 26/3 - 13/24$$

$$x = 195/24$$

Conjunto solução: S = {(195/24, -13/8)}.

3. (UFJuiz de Fora – MG) Resolvendo o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 7 \\ 2x - 3y + z = -1 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$



Encontramos **y** igual a:

a) 1
b) 3
c) 5
d) 2
e) 4

Tipos de Sistemas

Classificamos os tipos de sistemas de acordo com o número de soluções que o sistema linear possui. Um sistema pode apresentar nenhuma solução, uma solução ou infinitas soluções. Veja que, a quantidade de soluções está diretamente relacionada a nomenclatura:

Nomenclatura	*Quantidade de soluções*
Sistema impossível	Nenhuma
Sistema possível determinado	Uma
Sistema possível indeterminado	Infinitas

Veja que os nomes têm sentido quando consideramos as equações analisadas como afirmações. Se não existe nenhum valor que a torne verdadeira, ele será impossível! Se existe apenas um valor, ele é determinado. E, se existem vários valores, não dá para determiná-lo! Logo, indeterminado!

Exemplos bastante ilustrativos podem ser vistos abaixo sobre as diferentes quantidades de soluções.

Possível Determinado

Voltemos ao exemplo do Arnaldo e Bernardo. Aquele sistema é:

$$\begin{cases} y = 2x & \text{I} \\ y + x = 72 & \text{II} \end{cases}$$

Para solucionar este problema, temos que aplicar algum método de resolução. No caso, um método legal é o da substituição. Veja que, na primeira equação do sistema (I), a incógnita y é igual ao valor de x. Se substituirmos na segunda equação (II) o y por 2x, chegamos em uma equação com uma incógnita! Logo, conseguimos achar o valor de x! Achando o valor de x, basta multiplicar por 2 que acharemos o valor de y!

Logo, esse sistema é um exemplo de sistema possível (ele existe, não tem nenhum absurdo) e determinado (temos valores definidos para x e y).

Transformando em número:

$$\begin{cases} y = 2x \\ y + x = 72 \end{cases} \qquad (2x) + x = 72 \qquad 3x = 72 \qquad x = 72/3 = 24$$

Substituindo o valor de x para descobrirmos y:

$y = 2x = 2(24) = 48$

Logo, x = 24 e y = 48. Logo, o conjunto solução engloba somente a resposta do sistema. Conjunto solução: S = {(24, 48)}.

Possível Indeterminado

Para esse tipo de sistema, NÃO CONSEGUIMOS definir todos os valores das incógnitas. Um bom exemplo é: Uma camiseta, dois bonés e três calças custam, juntos, R$ 135,00. Uma calça, dois bonés e duas camisetas custam ao todo R$200,00. Quanto custa cada produto?

Chamando o preço da calça de k, o do boné de b e o da camiseta de c, podemos montar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} c+2b+3k = 135 & \text{I} \\ 2c+2b+k = 200 & \text{II} \end{cases}$$

Veja que, aplicando qualquer um dos dois métodos vistos, não chegamos em uma resposta! Veja:

Isolando c na primeira equação, temos:

$$c + 2b + 3k = 135$$

$$c = 135 - 2b - 3k$$

Ao substituirmos na segunda equação, chegamos em:

$$2c + 2b + k = 200$$

$$2*(135 - 2b - 3k) + 2b + k = 200$$

$$270 - 4b - 6k + 2b + k = 200$$

Passando o 270 para o outro lado da equação:

$$-4b + 2b - 6k + k = 200 - 270$$

Simplificando:

$$-2b - 5k = -70$$

Multiplicando os dois lados por -1, para tirar esses sinais de negativo:

$$-1 * (-2b - 5k) = -1*(-70)$$

$$2b + 5k = 70$$

Agora chegamos em um problema. Temos apenas uma equação para duas incógnitas! Como fazer? Não tem jeito, temos que chamar uma das variáveis de variável livre, ou seja, ela pode assumir qualquer valor que quisermos, e escrevemos as outras incógnitas em função dela. Veja:

Para $b = \alpha$:

$$2b + 5k = 70$$

$$2\alpha + 5k = 70$$

$$5k = 70 - 2\alpha$$

$$k = (70 - 2\alpha)5$$

$$k = 14 - 0,4\alpha$$

Já para o valor de c, basta substituir em uma das equações iniciais os valores de k e b encontrados. Veja:

Pela equação I:

$$c + 2b + 3k = 135$$

$$c + 2(\alpha) + 3(14 - 0,4\alpha) = 135$$

$$c + 2\alpha + 42 - 1,2\alpha = 135$$

$$c + 0,8\alpha + 42 = 135$$

$$c = 135 - 42 - 0,8\alpha$$

$$c = 93 - 0,8\alpha$$

Pela equação II:

$$2c + 2b + k = 200$$

$$2c + 2(\alpha) + (14 - 0,4\alpha) = 200$$

$$2c + 2\alpha + 14 - 0,4\alpha = 200$$

$$2c + 1,6\alpha + 14 = 200$$

$$2c = 200 - 1,6\alpha - 14$$

$$2c = 186 - 1,6\alpha$$

$$c = (186 - 1,6\alpha)/2$$

$$c = 93 - 0,8\alpha$$

Logo, a resposta do problema fica em função do valor de α. O conjunto de respostas desse tipo de sistema engloba infinitas solução, todas em função da variável α. Conjunto solução: S = { (93 - 0,8 α, α, 14 - 0,4 α)| α e R}.

Impossível

Para esse sistema, fica intuitivo seu nome. Esse sistema não deve existir, pois resulta em um absurdo! Ao desenvolvê-lo, chegaremos em algo contraditório, que vai contra a lógica! Veja o exemplo:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Que estranho! As duas equações se contradizem! Apesar dos lados esquerdos em relação ao sinal de igual serem iguais (x + y = x + y), os lados esquerdos são diferentes (2 ≠ 4)! Isso se caracteriza como um absurdo pois não existe essa situação! A soma de dois números resulta em um único valor, e não em dois diferentes!

Para esse tipo de sistema, não há resposta. O sistema apresenta conjunto solução vazio! Conjunto solução: S ={ } ou S=∅ .

4. (UFAM) Em relação ao sistema

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 5x + 4y - 2z = 0 \\ x + 8y + 2z = 0 \end{cases}$$

Pode-se afirmar que:

a) O sistema é impossível.
b) O sistema é indeterminado, com uma incógnita arbitrária.
c) O sistema é determinado.
d) O sistema é indeterminado, com duas incógnitas arbitrárias.
e) (0, 0, 0) é única solução do sistema.

Como estudar esse conteúdo?

Esse conteúdo é um dos mais importantes da álgebra, pois resolve-se vários exercícios com ele. Para um bom aproveitamento, foque bastante nos tipos de sistemas e em exercícios para pegar a prática de identifica-los mais facilmente. Alguns links interessantes:

[01] AULALIVRE.NET. *Vídeo Youtube: Matemática - Aula 07 - Sistemas Lineares.* Postado em 21 de nov. de 2012.

Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=PpH-bJ8Wrik>.

[02] HEXAG MACKENZIE. *Matemática - Sistemas Lineares.* Postado em 20 de jan. de 2015.

Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=h3gYYPOlx24>.

[03] NOVO TELECURSO. *Vídeo do You Tube: Matemática - Novo Telecurso - Ensino Médio - Aula 10 - Resolvendo Sistemas.* Postado em 10 de fev. de 2012.

Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=74QrSZyZW50>.

Os três sites listados acima são vídeo-aulas referentes ao assunto. São bastante concisos e dinâmicos.

Outra dica é fazer a lista de exercícios!

Bons Estudos!